

一种降低交替方向隐式时域有限 差分数值色散的方法

赵安兴^{1,2}, 黄斌科¹, 蒋延生¹, 汪文秉¹

(1. 西安交通大学电子与信息工程学院, 710049, 西安; 2. 山东建筑大学信息与电气工程学院, 250101, 济南)

摘要: 针对交替方向隐式时域有限差分方法(ADI-FDTD)数值色散严重的缺点,提出了一种低数值色散的各向同性 ADI-FDTD 方法. 该方法在 ADI-FDTD 方法的差分近似微分中引入各向同性差分模板,并通过确定各向同性差分的加权系数来近似实现各向同性,然后人为修正空间的介质参数来减少各个方向上的数值色散误差,因此在模拟一定带宽的时域问题时可有效提高计算精度和计算效率. 仿真结果表明,该方法在单频上可近似实现无数值色散误差,在所优化的频带附近其数值色散误差是 ADI-FDTD 方法的 1%.

关键词: 各向同性差分;数值色散误差;交替方向隐式

中图分类号: TM15 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2008)02-0209-04

Efficient Method to Reduce the Numerical Dispersion in the Alternating Direction Implicit Finite-Difference Time-Domain Algorithm

ZHAO Anxing^{1,2}, HUANG Binke¹, JIANG Yansheng¹, WANG Wenbing¹

(1. School of Electronics and Information Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China;

2. School of Information and Electrical Engineering, Shandong Jianzhu University, Jinan 250101, China)

Abstract: To reduce the large numerical dispersion error for the alternating direction implicit finite-difference time-domain method (ADI-FDTD), an isotropic ADI-FDTD method with low numerical dispersion error was presented. Firstly, the isotropic difference templates were introduced to approximate the differential in the ADI-FDTD method, and the weighting coefficients of difference terms were determined for implementing isotropic numerical dispersion; Then the permittivity and permeability were adjusted manually to reduce the numerical dispersion error in any directions. Therefore the simulation accuracy and efficiency can be improved effectively for time domain problems with some finite bandwidths. Simulation results show that the proposed method is nearly free from dispersion for a monochromatic frequency, and the numerical dispersion error is decreased approximately by 1% compared with the ADI-FDTD method in the optimizing frequency band.

Keywords: isotropic differences; numerical dispersion error; alternating direction implicit

针对传统时域有限差分方法(FDTD)受时间步长的限制, Namiki 提出的交替方向隐式时域有限差分(ADI-FDTD)方法^[1]是无条件稳定的,对模拟存在精细网格划分的问题非常有效. 然而,在相同条件下,ADI-FDTD 方法的数值色散误差比 FDTD 方法

大,因此增大时间步长将导致 ADI-FDTD 方法的数值色散误差增大,从而降低该方法的计算精度并限制对时间步长的增大,因此研究有效减小 ADI-FDTD 方法数值色散误差的途径是提高该方法模拟精度和效率的关键问题之一.

在传统的 FDTD 方法中可引入各向同性差分来减小数值色散误差^[2-3]. 在对空间微分作差分近似时,通过引入空间差分模板并且优化差分场量的系数,使差分格式在空间上具有更好的各向同性,并且人为修正相速度使 FDTD 方法在单频下几乎无数值色散误差. 本文将各向同性差分模板引入 ADI-FDTD 方法(简称各向同性 ADI-FDTD 方法),在给出各向同性 ADI-FDTD 方法的差分格式后,确定其差分加权系数来实现相速度的各向同性,并人为修正其相速度,减小了 ADI-FDTD 方法的数值色散误差.

1 各向同性 ADI-FDTD 方法差分格式

以自由空间的二维 TE 波为例. 和 ADI-FDTD 方法类似,每个时间步分 2 个子时间步进行场的迭代,这里以第 1 个子时间步为例,给出各向同性 ADI-FDTD 方法的差分公式

$$\begin{aligned} E_x \Big|_{i+1/2,j}^{n+1/2} &= E_x \Big|_{i+1/2,j}^n + \\ \frac{\Delta t}{2\epsilon\Delta y} &\left[\beta(H_z \Big|_{i+3/2,j+1/2}^n - H_z \Big|_{i+3/2,j-1/2}^n) + \right. \\ &\alpha(H_z \Big|_{i+1/2,j+1/2}^n - H_z \Big|_{i+1/2,j-1/2}^n) + \\ &\left. \beta(H_z \Big|_{i-1/2,j+1/2}^n - H_z \Big|_{i-1/2,j-1/2}^n) \right] \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_y \Big|_{i,j+1/2}^{n+1/2} &= E_y \Big|_{i,j+1/2}^n - \\ \frac{\Delta t}{2\epsilon\Delta x} &(H_z \Big|_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} - H_z \Big|_{i-1/2,j+1/2}^{n+1/2}) \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_z \Big|_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} &= H_z \Big|_{i+1/2,j+1/2}^n + \\ \frac{\Delta t}{2\mu\Delta y} &\left[\beta(E_x \Big|_{i+3/2,j+1}^n - E_x \Big|_{i+3/2,j}^n) + \right. \\ &\alpha(E_x \Big|_{i+1/2,j+1}^n - E_x \Big|_{i+1/2,j}^n) + \\ &\left. \beta(E_x \Big|_{i-1/2,j+1}^n - E_x \Big|_{i-1/2,j}^n) \right] - \\ \frac{\Delta t}{2\mu\Delta x} &(E_y \Big|_{i+1,j+1/2}^{n+1/2} - E_y \Big|_{i,j+1/2}^{n+1/2}) \quad (3) \end{aligned}$$

式中: E_x 、 E_y 分别为 x 、 y 方向电场分量; H_z 为 z 方向磁场分量; Δx 、 Δy 为空间步长; Δt 为时间步长; ϵ 、 μ 为自由空间的介电常数和磁导率; i 、 j 为空间网格的角标; n 为时间步长的角标; α 、 β 为空间差分项的加权系数,使 $\alpha+2\beta=1$ 以满足空间差分具有二阶精度 $O(\Delta x^2)$,实际模拟中 α 、 β 的取值将通过后面数值色散误差分析确定. 第 2 个子时间步的差分公式和第 1 个子时间步类似,只是在 y 方向和 x 方向上的

空间微分分别采用半隐式差分 and 显式差分.

2 数值稳定性分析

这里利用 Neumann 方法分析各向同性 ADI-FDTD 方法的数值稳定性^[4]. 空间任意波可用平面波展开,因此在 n 时间步的 TE 波可表示如下

$$V_\zeta = \Psi_\zeta \xi_l^n \exp[-j(k_x x + k_y y)] \quad (4)$$

式中: V_ζ 在 $\zeta=x, y, z$ 时分别代表场分量 E_x 、 E_y 和 H_z ; Ψ_ζ ($\zeta=x, y, z$) 为对应场的幅度; ξ_l^n 为第 n 个时间步中第 l ($l=1, 2$) 个子时间步的放大因子; $j=(-1)^{1/2}$ 为虚部; k_x 、 k_y 为 x 、 y 方向的波数. 将式(4)对应项代入式(1)~式(3)可得到矩阵方程

$$\begin{bmatrix} \xi_1 - 1 & 0 & as_y c_x \\ 0 & \xi_1 - 1 & -a\xi_1 s_x \\ bs_y c_x & -b\xi_1 s_x & \xi_1 - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_{x0} \\ \Psi_{y0} \\ \Psi_{z0} \end{bmatrix} = 0 \quad (5)$$

式中: $a=j\Delta t/\epsilon$; $b=j\Delta t/\mu$; $s_x=\sin(k_x\Delta x/2)/\Delta x$; $s_y=\sin(k_y\Delta y/2)/\Delta y$; $c_x=\alpha+2\beta\cos(k_x\Delta x)$; $c_y=\alpha+2\beta\cos(k_y\Delta y)$. 当式(5)中矩阵行列式为 0 时,放大因子 ξ_1 满足方程

$$(1+r_x^2)\xi_1^2 - 2\xi_1 + (1+r_y^2 c_x^2) = 0 \quad (6)$$

式中: $r_x=c\Delta t\sin(k_x\Delta x/2)/\Delta x$; $r_y=c\Delta t\sin(k_y\Delta y/2)/\Delta y$; $c=(\mu\epsilon)^{-1/2}$. 求解式(6)得到第 1 个子时间步的放大因子

$$\xi_1 = \frac{1 \pm j[(1+r_x^2)(1+r_y^2 c_x^2) - 1]^{1/2}}{(1+r_x^2)} \quad (7)$$

类似地,可得到第 2 个子时间步的放大因子

$$\xi_2 = \frac{1 \pm j[(1+r_x^2 c_y^2)(1+r_y^2) - 1]^{1/2}}{(1+r_y^2)} \quad (8)$$

由式(7)、式(8)可得到各向同性 ADI-FDTD 方法满足无条件稳定的条件

$$(1+r_y^2 c_x^2)(1+r_x^2 c_y^2) \leq (1+r_x^2)(1+r_y^2) \quad (9)$$

由式(9)及 $\alpha+2\beta=1$ 可得到 β 的取值范围

$$Q \geq \beta \geq 0; \quad P \geq \beta \geq 0 \quad (10)$$

式中: $Q = \frac{1}{[1-\cos(k_x\Delta x)]}$; $P = \frac{1}{[1-\cos(k_y\Delta y)]}$.

假定最高频率对应波长为 $\lambda_{\min}$, 空间步长 $\Delta x=\Delta y=\lambda_{\min}/N$, 其中 N 为每波长的采样网格数,在 $N>2$ 时, Q 、 P 的最小值为 $Q_{\min}=P_{\min}=1/[1-\cos(2\pi/N)]$, 因此满足无条件稳定性的 β 取值范围为

$$1/[1-\cos(2\pi/N)] \geq \beta \geq 0 \quad (11)$$

FDTD 和 ADI-FDTD 方法中 N 的取值一般不小于 10, 这里 N 取 20, $\beta \leq 20.43$ 时是无条件稳定的. 因此,在确定差分加权系数 β 值减小数值色散误差时,需满足 ADI-FDTD 方法无条件稳定对 β 取值

的限制。

3 数值色散分析

放大因子的相位决定了各向同性 ADI-FDTD 方法的数值色散关系^[5]。在信号角频率为 ω 时,由式(7)、式(8)可得各向同性 ADI-FDTD 方法的数值色散关系

$$\tan(\omega\Delta t) = \frac{[r_x^2 + r_y^2 c_x^2 + r_x^2 r_y^2 c_x^2]^{1/2} + [r_y^2 + r_x^2 c_y^2 + r_y^2 r_x^2 c_y^2]^{1/2}}{1 - [r_x^2 + r_y^2 c_x^2 + r_x^2 r_y^2 c_x^2]^{1/2} [r_y^2 + r_x^2 c_y^2 + r_y^2 r_x^2 c_y^2]^{1/2}} \quad (12)$$

由前面分析可见,式(12)为关于波数 k 的非线性方程。通过确定 β ,使 k 在所有方向上保持近似相同,然后通过波的相速度修正可使各向同性 ADI-FDTD 的数值色散误差在各个方向上趋于 0。

3.1 差分加权系数 β 的确定

当角度 $\phi = 0^\circ$ 时,由式(12)求得各向同性 ADI-FDTD 方法的数值波数

$$\tilde{k} = (2/\Delta) \sin^{-1}[\Delta \tan(\omega\Delta t)/(c\Delta t)] \quad (13)$$

式中: $\Delta = \Delta x = \Delta y$ 。将式(13)代入式(12),可求得满足数值波数为常数 $\tilde{k}$ 的 β 。图 1 给出了所有不同角度 ϕ 上 β 的最大最小值差随 N 和 Courant 数 S ($S = c\Delta t/\Delta$) 的变化。由图可见, N 较大及 S 较小时, β 的最值变化范围较小。 N 的取值需满足

$$N > \frac{\pi S}{\arctan S} \quad (14)$$

$$N > 4S \quad (15)$$

式(14)满足式(13)中反正弦函数自变量小于 1,式(15)满足 $\omega\Delta t < \pi/2$ 。

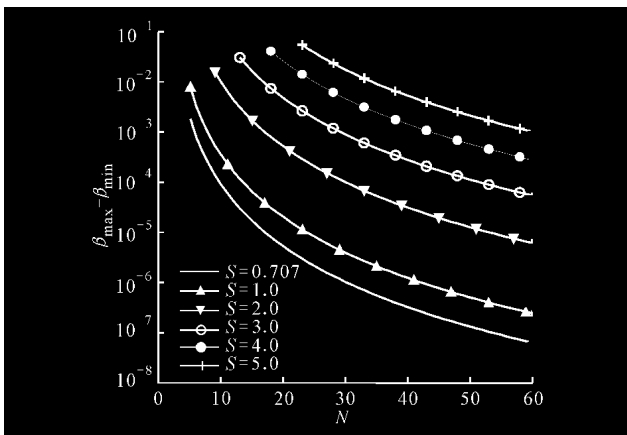


图 1 β 的极值范围随 N 的变化曲线

图 2 给出了最佳 β 取值随 N 和 S 的变化,最佳 β 的取值为所有角度上的 β 平均值。从图 2 看出: S 固定时, β 随 N 近似常数变化。在 $S = 0.707, 1.0,$

2.0 和 $N = 20$ 时, β 值分别为 $0.1457, 0.2071, 0.5629$;在 $S = 3.0, 4.0, 5.0$ 和 $N = 30$ 时, β 值分别为 $1.1641, 1.9444, 2.8671$ 。实际中根据激励信号的中心频率确定 N 和 S ,然后取对应 N 和 S 下的 β 值可得到近似各向同性的数值色散误差。

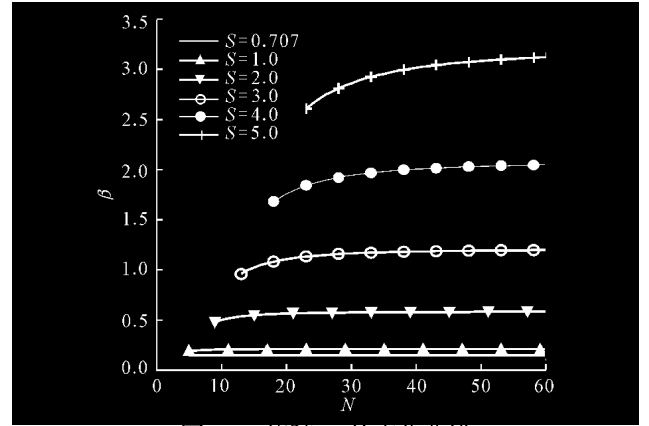
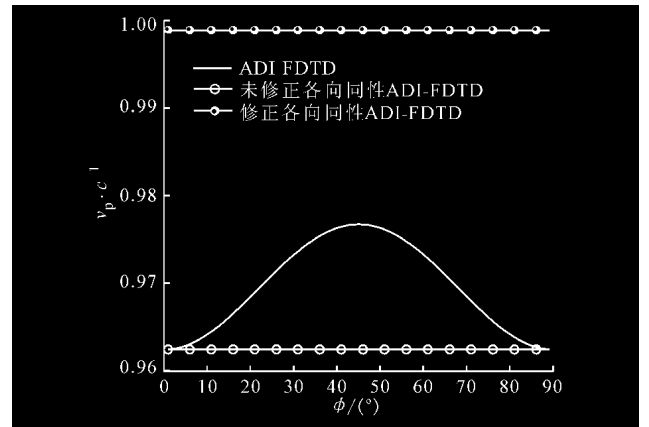


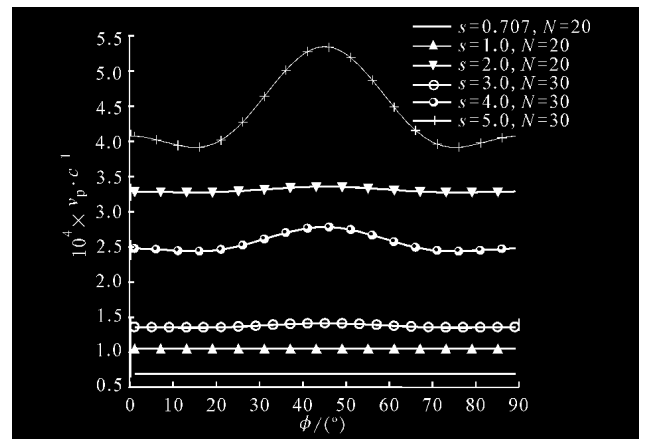
图 2 β 值随 N 的变化曲线

3.2 修正介电常数 ϵ 和磁导率 μ 消除数值色散误差

当差分加权系数 β 确定后,代入式(12)求得的波数 $\tilde{k}$ 以及归一化相速度在各个方向是相同的。图 3a 给出了 $S = 2.0, N = 20$ 时数值色散误差修正前



(a) 不同方向的归一化相速度曲线



(b) 归一化相速度误差曲线

图 3 波传播方向的数值色散性能

的归一化相速曲线,可见修正前的数值相位速度是小于光速的.为使数值相位速度和实际波传播速度 c 接近,可人为放大介质常数 ϵ 和 μ ^[6].取 $k_{\text{ex}}/k'=1$, 其中 k_{ex} 为解析解的波数, k' 为式(13)的解,但其中的光速 c 用 c/m_0 代替,其中 m_0 为修正因子

$$m_0 = \sin(k_{\text{ex}}\Delta/2)/[\tan(\omega\Delta t)/S] \quad (16)$$

要满足式(13)中的光速 c 为 c/m_0 ,只需修正空间介质参数 ϵ 和 μ 分别为 $m_0\epsilon$ 和 $m_0\mu$.图 3a 中也给出了修正后的归一化数值相位速度,可以看出在介质参数修正后所有方向上的归一化相位速度接近 1.图 3b 给出了不同 N 和 S 下各向同性 ADI-FDTD 方法在修正介质参数后的数值色散误差,可以看出在单个频率上各向同性 ADI-FDTD 方法的数值色散误差在 10^{-4} 量级,是远小于 ADI-FDTD 方法的.

下面研究各向同性 ADI-FDTD 方法在宽带下的数值色散误差.图 4a 给出了本文方法和 ADI-FDTD 方法在所有方向上的最大归一化数值相位速度误差随 N 的变化曲线,其中 $S=2$,且以 $N=30$ 确定 β 值,可见在 $N=30$ 时数值色散误差最小,大约是 ADI-FDTD 方法的 1%.图 4b 给出了 $S=2$ 时所有方向上最大归一化数值相位速度误差随 N 的

变化曲线,其中取 $N=20, 30, 40, 50$ 来分别确定 β 值.由于介质参数修正是按每波长的采样网格数 N (对应单个频率)进行的,因此修正后各向同性 ADI-FDTD 方法的数值色散误差只在一定带宽下是小于 ADI-FDTD 方法的.在低频率区,其数值色散误差反而会变大,这是人为针对某一特定波长(频率)修正引起的.因此,在各向同性 ADI-FDTD 方法中, β 和 N 最好以所研究信号的中心频率进行确定.由图 4b 还可以看出,在 N 取不同值时确定 β 后,各向同性 ADI-FDTD 方法满足较低数值色散误差的带宽,在采用较大的 N 时,较低数值色散误差对应的带宽较大.

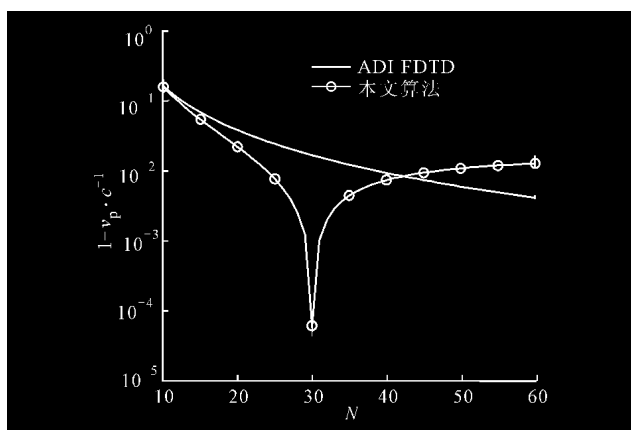
由以上对各向同性 ADI-FDTD 方法中差分加权系数 β 的确定可见,在模拟存在精细网格划分及所分析信号频带不是很宽的问题时,本文方法的数值色散误差在各个角度上是小于 ADI-FDTD 方法的,但对于各向同性 ADI-FDTD 方法,首先要满足一定的每波长空间网格采样数 N ,以使 β 的优化值满足各向同性 ADI-FDTD 方法的无条件稳定要求.另外,由于人为对某一频带上数值色散误差的修正,因此本文方法只适合分析具有一定带宽的时域问题,否则将会使模拟精度下降.

4 结 论

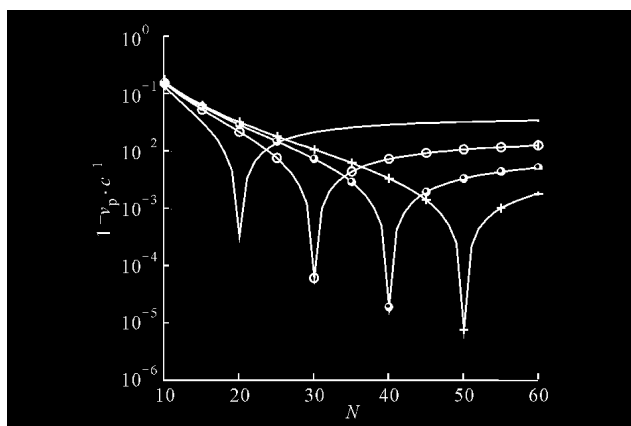
为了有效降低数值色散误差提高 ADI-FDTD 方法的计算精度及计算效率,本文提出一种低色散各向同性 ADI-FDTD 方法,在传统的 ADI-FDTD 方法中引入各向同性差分格式,并通过优化差分加权系数和人为修正空间介质参数来减少数值色散误差.仿真表明:在单频条件下可实现近似无数值色散误差;与 ADI-FDTD 方法相比,在一定带宽下可获取更低的数值色散误差,有效提高模拟效率和精度.

参考文献:

- [1] NAMIKI T. A new FDTD algorithm based on alternating-direction implicit method [J]. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, 1999, 47(10): 2003-2007.
- [2] YANG B, BALANIS C A. Least square method to optimize the coefficients of complex finite-difference space stencils [J]. IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters, 2006, 5(1): 450-453.
- [3] KOH I S, KIM H, LEE J M, et al. Novel explicit 2-D FDTD scheme with isotropic dispersion and enhanced



(a)两种方法最大归一化数值相位,速度误差的比较



(b)最大数值归一化相位速度误差随 N 的变化曲线

图4 各向同性 ADI-FDTD 方法在宽带下的数值色散性能

- stability [J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2006, 54(11): 3505-3510.
- [4] NEUMANN J V. Mathematical foundations of quantum mechanics [M]. Princeton, USA: Princeton University Press, 1955.
- [5] SUN G, TRUEMAN C W. Analysis and numerical experiments on the numerical dispersion of two-dimensional ADI-FDTD [J]. IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters, 2003, 2(1): 78-81.
- [6] SUZUKI K, KASHIWA T, HOSOYA Y. Reducing the numerical dispersion in the FDTD analysis by modifying anisotropically the speed of light [J]. Electronics and Communication in Japan: Part 2, 2000, 85(1): 389-396.

(编辑 刘杨)